Přibližné řešení algebraických rovnic

Algebraickou rovnicí stupně n nazýváme rovnici $P_n(x) = 0$, tj.
$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$, kde $n \in N$, $x \in C$, koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_0 \neq 0$.

Budeme pracovat s tzv. **normovanou algebraickou rovnicí** ($a_0 = 1$)

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \ .$$

Řešením (kořenem) algebraické rovnice $P_n(x) = 0$ je každé číslo c, které je kořenem polynomu $P_n(x)$. Algebraická rovnice stupně n tedy má právě n kořenů.

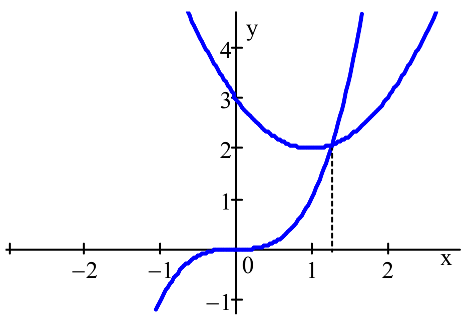
Možnosti přibližného řešení : **1.** Graficky

2. Numericky

1. Grafické řešení

Graficky můžeme určit přibližnou hodnotu reálných kořenů. Kořeny rovnice $P_n(x) = 0$ jsou vlastně průsečíky grafu s osou x. Nakreslit graf funkce $P_n(x)$ však může být pracné. Proto obvykle upravíme rovnici na tvar $f(x) = g(x)$ tak, abychom dokázali nakreslit dva jednodušší grafy $y = f(x)$ a $y = g(x)$. Reálné kořeny rovnice $P_n(x) = 0$ jsou potom rovny x-ovým souřadnicím průsečíků těchto křivek.

Příklad: Řešte graficky rovnici $x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0$.
Řešení: Rovnici můžeme upravit například takto: $x^3 = x^2 - 2x + 3$. Grafem funkce na levé straně rovnice je kubická parabola, grafem kvadratické funkce na pravé straně rovnice je „posunutá“ parabola, jejíž vrchol si určíme.
$y = x^2 - 2x + 3$
$y = (x-1)^2 - 1 + 3 \quad \Rightarrow \quad y - 2 = (x-1)^2$, jde tedy o parabolu s vrcholem v bodě $[1,2]$ a osou rovnoběžnou s osou y .
Oba grafy co nejpřesněji nakreslíme.

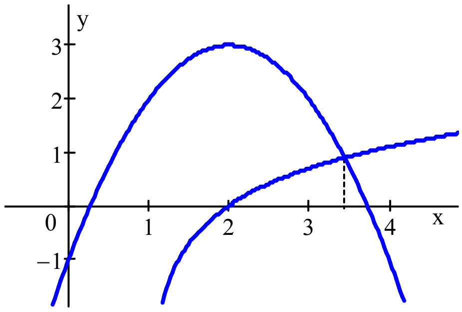


Hledáme, pro jaká x jsou si funkce rovny, tedy x-ové souřadnice průsečíků. V tomto případě je jeden a změřením hodnoty v grafu bychom patrně získali $x \doteq 1{,}25$.
(Pro informaci: výpočtem $x = 1{,}27568$.)

Poznámka: Tuto metodu můžeme použít nejen pro algebraické rovnice.

Příklad: Určete přibližné řešení rovnice $\ln(x-1) + x^2 - 4x + 1 = 0$.
Řešení: Rovnici upravíme převedením některých členů na pravou stranu. Jediným kritériem je, abychom dokázali nakreslit příslušné grafy. V naší úloze bude nejvhodnější úprava rovnice na tvar : $\ln(x-1) = -x^2 + 4x - 1$.
Budeme tedy hledat průsečík logaritmické křivky s parabolou. Nejdříve vypočteme vrchol paraboly, která je grafem funkce $y = -x^2 + 4x - 1$.

$$y = -(x^2 - 4x + 1) \iff y = -[(x-2)^2 - 4 + 1] \iff y - 3 = -(x-2)^2 \Rightarrow \mathrm{V}=[2,3]$$



Po nakreslení grafů bychom patrně naměřili výsledek $x \doteq 3{,}4$.
Při užití početních metod by se $x \doteq 3{,}45043$.

2. Numerické řešení

Nejdříve získáme informace o kořenech rovnice, potom určíme intervaly co nejmenší délky, ve kterých kořeny leží a na závěr určíme přibližnou hodnotu kořene s požadovanou přesností pomocí některé z aproximačních metod.

1) Ohraničení kořenů a určení jejich počtu

Pro všechny kořeny x_i normované algebraické rovnice $P_n(x) = 0$ platí $|x_i| < 1 + \mathrm{A}$, kde
$\mathrm{A} = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$.
Reálné kořeny tedy leží v intervalu $(-(1+A), 1+A) = (-A-1, A+1)$.

Příklad: Pro rovnici $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 7x + 5 = 0$ je $\max\{|4|,|-2|,|-7|,|5|\} = 7$.

Proto $|x_i|$ < 1 + 7, tedy kořeny x_i leží v intervalu (–8,8).

Algebraická rovnice stupně n má právě n kořenů, přičemž algebraická rovnice lichého stupně má alespoň 1 reálný kořen.

Můžeme odhadnout i počet kladných případně záporných reálných kořenů (Descartova věta):

- Počet kladných reálných kořenů (počítaných i s jejich násobností) rovnice $P_n(x) = 0$ je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_0, a_1, ..., a_n$ nebo o sudé číslo menší.
- Počet záporných reálných kořenů dostaneme, když místo polynomu $P_n(x)$ budeme uvažovat polynom $P_n(-x)$. V obou případech vynecháme nulové koeficienty.

Příklad: Odhadněte počet reálných kořenů rovnice $x^5 + 2x^4 - x^3 + x + 1 = 0$.

Řešení: Rovnice má celkem 5 kořenů (včetně komplexních).

Počet kladných reálných kořenů určíme na základě znaménkových změn v posloupnosti koeficientů polynomu $P(x)$:

Nenulové koeficienty jsou $1,\ 2,\ -1,\ 1,\ 1$. Dochází ke dvěma znaménkovým změnám (mezi druhým a třetím, třetím a čtvrtým koeficientem).

Rovnice má tedy 2 kladné reálné kořeny nebo nemá kladný kořen.

Počet záporných reálných kořenů určíme na základě znaménkových změn v posloupnosti koeficientů pomocného polynomu

$$P(-x) = (-x)^5 + 2(-x)^4 - (-x)^3 + (-x) + 1 = -x^5 + 2x^4 + x^3 - x + 1.$$

Nenulové koeficienty jsou $-1,\ 2,\ 1,\ -1,\ 1$. Dochází ke třem znaménkovým změnám (mezi prvním a druhým, třetím a čtvrtým, čtvrtým a pátým koeficientem).

Rovnice má tedy 3 záporné reálné kořeny nebo jeden záporný kořen.

Poznámka: V případě, že by u nějaké rovnice znaménkových změn bylo např. 6, znamenalo by to, že příslušných kořenů bude 6 nebo 4 nebo 2 nebo žádný.
V případě, že by znaménková změna byla jen 1, znamenalo by to, že rovnice má právě jeden reálný (kladný nebo záporný) kořen. Zbývající kořeny do počtu n jsou pak komplexní.

2) Separace kořenů

Separací kořenů rozumíme nalezení takových intervalů, v nichž leží právě 1 kořen.

Využijeme Bolzanovu větu, kterou známe z diferenciálního počtu:

Je-li $P(a) \cdot P(b) < 0$, existuje alespoň jeden bod $c \in (a,b)$ takový, že $P_n(c) = 0$.

Tedy mají-li hodnoty polynomu v krajních bodech intervalu opačná znaménka, leží v intervalu lichý počet kořenů.

Pokud $P(a) \cdot P(b) > 0$, potom leží v intervalu sudý počet kořenů nebo zde neleží žádný.

Budeme tedy hledat interval, v jehož krajních bodech mají hodnoty polynomu $P(x)$ opačná znaménka. Postupujeme tak, že interval, ve kterém leží reálné kořeny rovnice, rozdělíme na menší podintervaly a počítáme hodnoty $P(x)$ v dělících bodech.

Příklad: Proveďte separaci kořenů rovnice $x^3 - x^2 - 5x + 4 = 0$.

Řešení: $A = \max\{|-1|, |-5|, |4|\} = 5$, proto interval, ve kterém kořeny leží, je (–6, 6). Rovnice bude mít 2 nebo žádný kladný reálný kořen a právě jeden záporný reálný.

Vzhledem k velikosti intervalu můžeme zvolit dělení na podintervaly délky 2. Po nalezení intervalu, ve kterém leží kořen, můžeme případně dělení zjemnit. Budeme tedy počítat hodnoty polynomu $P_3(x) = x^3 - x^2 - 5x + 4$ v jednotlivých bodech, abychom zjistili, kde přechází z kladných hodnot do záporných nebo naopak.

Pro výpočet funkční hodnoty je výhodné použít Hornerovo schéma.

	1	–1	–5	4	sgn $P(x_i)$
–6	1	–7	37	–218	–
–4	1	–5	15	–56	–
–2	1	–3	1	2	+
0	1	-1	-5	4	+
2	1	1	-3	-2	–
4	1	3	7	32	+
6	1	5	25	154	+

Kořeny tedy leží v intervalu (–4,–2), (0,2) a (2,4).
Chceme-li interval délky jedna, dopočítáme např. pro interval (–4,–2) hodnotu v bodě –3, $P(-3) = -17$ a zjistíme, že jediný záporný kořen rovnice leží v intervalu (–3,–2).

Daná rovnice má tedy 3 reálné kořeny, které leží v intervalech (–4,–2), (0,2) a (2,4).

Poznámka: Nechcete-li pro výpočet hodnot polynomu použít Hornerovo schéma, ale vypočítáte si je na kalkulačce, je vhodné si přehledně poznačit výsledky např. do tabulky

	–6	–4	–2	0	2	4	6
$\operatorname{sgn} P(x_i)$	–	–	+	+	–	+	+

Odtud je vidět, že se znaménko změnilo v intervalech (–4,–2), (0,2) a (2,4).

3. Aproximace kořenů

Hodnotu kořene, který leží v konkrétním intervalu, můžeme vypočítat s potřebnou přesností pomocí některé z aproximačních metod. Nejjednodušší z nich je metoda půlení intervalu.
Postup: Interval $\langle a,b\rangle$, ve kterém leží právě jeden kořen rozpůlíme. Vybereme ten z intervalů $\langle a_i,b_i\rangle$, v jehož krajních bodech má polynom opačná znaménka. Vybraný interval rozpůlíme a stejným způsobem pokračujeme dál. Je-li $\langle a_i,b_i\rangle$ poslední získaný interval, má hledaný kořen hodnotu $x \doteq \frac{a_i+b_i}{2}$.
Postup opakujeme, dokud chyba aproximace není menší než požadovaná maximální chyba výpočtu. Chyba aproximace je přitom v každém kroku rovna maximálně polovině délky intervalu, tedy je menší než $\frac{b_k-a_k}{2}$.

Příklad: Vypočtěte kořen rovnice $x^3+3x+5=0$, který leží v intervalu (–2,–1), s přesností alespoň (tj. s chybou menší než) 0,05.

Řešení: Výpočet budeme pro přehlednost zapisovat do tabulky:

a_k	$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$	b_k	$\operatorname{sgn} P(a_k)$	$P(x_k)$	$\operatorname{sgn} P(b_k)$	$\frac{b_k-a_k}{2}$
–2	–1,5	–1	–	–2,875	+	0,5
–1,5	–1,25	–1	–	–0,7031	+	0,25
–1,25	–1,125	–1	–	0,20117	+	0,125
–1,25	–1,1875	–1,125	–	–0,23706	+	0,0625
–1,1875	–1,15625	–1,125	–	–0,01456	+	0,03125 < 0,05

Protože v posledním kroku je chyba menší než 0,05 , ukončíme výpočet.
Kořenem je tedy číslo $x \doteq -1{,}15625$.
Pro přesnou hodnotu kořene platí $x \in \left(-1{,}1875;-1{,}125\right)$, nebo také $x=-1{,}15625 \pm 0{,}03125$.